

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. a) Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, gilt:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

(Dabei dürfen Schulkenntnisse wie Bruchrechnung, die Binomischen Formeln usw. verwendet werden.)

- b) Ein Fahrradfahrer fährt eine Stunde lang bergauf mit a km/h und anschließend eine Stunde lang bergab mit konstant b km/h. Wie groß ist seine durchschnittliche Geschwindigkeit.
- c) Ein Fahrradfahrer fährt mit konstant a km/h auf einen Berg und anschließend die gleiche Strecke mit konstant b km/h zurück. Berechnen Sie seine durchschnittliche Geschwindigkeit.

2. Für eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

$A(z)$: „ z ist ungerade.“

$B(z)$: „ $z^2 + 2z + 3$ ist gerade.“

$C(z)$: „ $z^2 + z + 1$ ist ungerade.“

- a) Zeigen Sie die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [A(z) \implies B(z)]$$

durch einen direkten Beweis, und die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [B(z) \implies A(z)]$$

durch einen indirekten Beweis.

- b) Zeigen Sie die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [A(z) \implies C(z)]$$

durch einen direkten Beweis und entscheiden Sie, ob in dieser Aussage auch die Umkehrung „ \Leftarrow “ gilt.

3. Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ betrachte man die Aussagen

$$P_1 : \exists x \in M \quad \forall y \in M : x \leq y,$$

$$P_2 : \forall y \in M \quad \exists x \in M : x \leq y.$$

- a) Bilden Sie die Negationen der Aussagen P_1 und P_2 .
- b) Bestimmen Sie (mit Beweis) den Wahrheitswert der Aussagen P_1 und P_2 für die Mengen $M = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Z}$. (Hierbei dürfen Schulkenntnisse über die natürlichen und ganzen Zahlen verwendet werden.)

4. a) Es seien $a, x \in \mathbb{R}$ und $A = \{5, a, 2x\}$ sowie $B = \{8, a + 1, 4\}$. Für welche Werte von a und x ist $A \subset B$ eine wahre Aussage? (Beweisen Sie Ihre Antwort.)
- b) Es seien $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $N = \{x^2 - 1 \mid x \in M\}$.
- Man bestimme die Elemente von N .
 - Man bestimme $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$ und $N \setminus M$.
 - Man bestimme die Menge $\{(x, y) \in M \times N \mid x < y\}$.

Abgabe bis 8.11.2019, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).